第十二讲

容斥与抽屉

超常篇

1.

设这 11 个数为a_1，a_2，a_3，……，a_{11}，由 5 个数的结论可知，在a_1，a_2，a_3，a_4，a_5中必有 3 个数，其和为 3 的倍数，不妨设$a_1+a_2+a_3=3k_1$；在a_4，a_5，a_6，a_7，a_8中必有 3 个数，其和为 3 的倍数，不妨设$a_4+a_5+a_6=3k_2$；在a_7，a_8，a_9，a_{10}，a_{11}中必有 3 个数，其和为 3 的倍数，不妨设$a_7+a_8+a_9=3k_3$．又在k_1，k_2，k_3中必有两个数的奇偶性相同，不妨设k_1，k_2的奇偶性相同，那么$3k_1+3k_2$是 6 的倍数，即a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6的和是 6 的倍数

2.

设小明第 1 天做了a_1道题，前 2 天共做了a_2道题，前 3 天共做了a_3道题，……，前 14 天共做了a_{14} 道题．显然$a_{14}=20$，而a_1～a_{13}都小于 20．考虑a_1，a_2，a_3，……，a_{14}及a_1+7，a_2+7，a_3+7，……，$a_{14}+7$这 28 个数，它们都不超过 27．

根据抽屉原理，这 28 个数中必有两个数相等．由于a_1，a_2，a_3，……，a_{14}互不相等，a_1+7，a_2+7，a_3+7，……，$a_{14}+7$也互不相等，因而这两个相等的数只能一个在前一组，另一个在后一组中，即有：$a_j=a_i+7$，所以$a_j-a_i=7$．这表明从第$i+1$天到第j天，小明恰好做了 7 道题．

3.

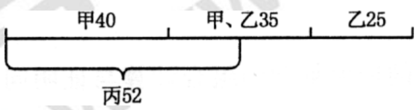
$1996\div4=499$，下面证明可以找到 1 个各位数字都是 1 的自然数，它是 499 的倍数．

取 500 个数：1，11，111，……，111……1（500 个 1）．用 499 去除这 500 个数，得到 500 个余数a_1，a_2，a_3，…，a_{500}．由于余数只能取 0，1，2，…，498 这 499 个值，所以根据抽屉原则，必有 2 个余数是相同的，这 2 个数的差就是 499 的倍数，差的前若干位是 1，后若干位是 0：

11…100…0．又 499 和 10 是互质的，所以它的前若干位由 1 组成的自然数是 499 的倍数，将它乘以 4，就得到一个各位数字都是 4 的自然数，这是 1996 的倍数

4. 如果数学书有 x 本，那么英语书有 16-x 本，语文书有 17-（16-x）=x+1 本，历史书为 35-(x+16-x+x+1)=18-x 本，其中有可能出现相等的有 x 和 16-x，x 和 18-x 因为它们奇偶性相同.为了不相等，x≠8 且 x≠9，有此得到 16-x 不等于 8 和 7，x+1 不等于 9 和 10，18-x 不等于 10 和 9，只有 16-x 可以等于 9，所以英语书有 9 本.

5.



考虑甲乙两人情况，有甲乙都读过的最少为：75+60-100=35 个，此时甲单独读过的为 75-35=40 个，乙单独读过的为 60-35=25 个；欲使甲、乙、丙三人都读过的书最少时，应将丙读过的书尽量分散在某端，于是三者都读过书最少