第十二讲

容斥与抽屉

提高、尖子篇

1.

数学小组共有 20 名同学，因此每个同学最多有 19 个朋友；又由于他们都有朋友，所以每个同学至少有 1 个朋友.因此，这 20 名同学中，每个同学的朋友数只有 19 种可能：1，2，3，……，19．把这 20 名同学看作 20 个“苹果”，又把同学的朋友数目看作 19 个“抽屉”，根据抽屉原理，至少有 2 名同学，他们的朋友人数一样多

2.

①对前一种情况，可取红、黑色的 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13 点各 1 张，共 13×2=26（张），那么再取一张牌，必定和其中某一张牌点数相同，于是就有 2 张牌点数和颜色都相同。这是最杯的情况，因此，至少要取 27 张牌，必能保证有 2 张牌点数、颜色都相同。

②对后一种情况，有以下的搭配：

（1，2，3）、（4，5，6）、（7，8，9）、（10，11，12），13。

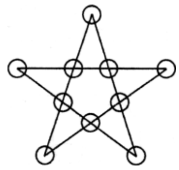
因而对涂阴影的 9 个数，四种花色的牌都取，这样可以取到（4×2+1）×4=36（张）牌，其中没有 3 张牌的点数是相邻的。

现在考虑取 37 张牌，极端情况下，这 37 张牌，有 4 张是 13，则至少要有 33 张牌取自（1，2，3）、（4，5，6）、（7，8，9）、（10，11，12）四个抽屉，根据抽屉原则，必有 9 个数来自其中一个抽屉，这个抽屉中就一定有 3 张牌的点数相邻的。因此，至少要取 37 张牌。

3. 设这 11 个数为 a_1，a_2，a_3，……，a_{11}，由 5 个数的结论可知，在 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 中必有 3 个数，其和为 3 的倍数，不妨设 $a_1+a_2+a_3=3k_1$；在 a_4，a_5，a_6，a_7，a_8 中必有 3 个数，其和为 3 的倍数，不妨设 $a_4+a_5+a_6=3k_2$；在 a_7，a_8，a_9，a_{10}，a_{11} 中必有 3 个数，其和为 3 的倍数，不妨设 $a_7+a_8+a_9=3k_3$．又在 k_1，k_2，k_3 中必有两个数的奇偶性相同，不妨设 k_1，k_2 的奇偶性相同，那么 $3k_1+3k_2$ 是 6 的倍数，即 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6 的和是 6 的倍数

4. 804 头

5.



【解析】如下图，下图中“ ”位置均有两条线段通过，也就是交点，如果这些交点所对应的线段都在“ ”位置恰有红色点，那么在五角星上重叠的红色点最多，所以此时显现的红色点最少，有 1994×5-(2-1)×10=9960 个.