第十讲

因数与倍数（一）

竞赛篇

1. **用 2、3、4、5、6、7 这六个数码组成两个三位数 *A* 和 *B*，那么 *A*、*B*、540 这三个数的最大公约数最大可能是___________.**

【解析】$540=2^2\times3^3\times5$，A、B、540 这三个数的最大公约数是 540 的约数，而 540 的约数从大到小排列依次为：540、270、180、135、108、90……由于 A 和 B 都不能被 10 整除，所以 540、270、180 都不是 A 和 B 的约数．由于 A 和 B 不能同时被 5 整除，所以 135 也不是 A 和 B 的公约数．540 的约数除去这些数后最大的为 108，考虑 108 的三位数倍数，有 108、216、324、432、540、648、756、864、972，其中由 2、3、4、5、6、7 这六个数码组成的有 324、432 和 756，易知当 A 和 B 一个为 756、另一个为 324 或 432 时，A、B、540 这三个数的最大公约数为 108，所以 A、B、540 这三个数的最大公约数最大可能是 108.

【答案】108

2. **一个两位数有 6 个约数，且这个数最小的 3 个约数之和为 10，那么此数为几？**

【解析】最小的三个约数中必然包括约数 1，除去 1 以外另外两个约数之和为 9，由于 9 是奇数，所以这两个约数的奇偶性一定是相反的，其中一定有一个是偶数，如果一个数包含偶约数，那么它一定是 2 的倍数，即 2 是它的约数。于是 2 是这个数第二小的约数，而第三小的约数是 7，所以这个两位数是 14 的倍数，由于这个两位数的约数中不含 3、4、5、6，所以这个数只能是 14 或 98，其中有 6 个约数的是 98.

【答案】98

3. （2006 年第 **11** 届华杯赛决赛试题）**100 个非 0 自然数的和等于 2006，那么它们的最大公约数最大可能值是（　　）.**

【解析】2006=2×17×59，现在要求最大公约数最大，则让整个一百个数的和除以约数后的商尽可能的小，且还应该为 2006 的一个约数，100 个非 0 自然数的和最小且符合是 2006 的一个约数的为 2×59=118．所以，最大公约数的最大可能值为 17.

【答案】17

3.（2004 年第 9 届华杯赛决赛试题）
三个连续正整数，中间一个是完全平方数，将这样的三个连续正整数的积称为“美妙数”．问所有的小于 2008 的“美妙数”的最大公约数是多少？

【解析】

①任何三个连续正整数，必有一个能为 3 整除．所以，任何“美妙数”必有因子 3．
②若三个连续正整数中间的数是偶数，它又是完全平方数，必定能为 4 整除；若中间的数是奇数，则第一和第三个数是偶数，所以任何“美妙数”必有因子 4．
③完全平方数的个位只能是 1、4、5、6、9 和 0，若其个位是 5 和 0，则中间的数必能被 5 整除，若其个位是 1 和 6，则第一个数必能被 5 整除，若其个位是 4 和 9，则第三个数必能被 5 整除．所以，任何“美妙数”必有因子 5．
④上述说明“美妙数”都有因子 3、4、和 5，也就有因子 60，即所有的美妙数的最大公约数至少是 60．60=3×4×5 是一个“美妙数”，美妙数的最大公约至多是 60．所有的美妙数的最大公约数既不能大于 60，又至少是 60，只能是 60．

5.（2009 年第 14 届华杯赛决赛试题）
已知 *a*,*b*,*c* 是三个自然数，且 *a* 与 *b* 的最小公倍数是 60，*a* 与 c 的最小公倍数是 270．求 *b* 与 *c* 的最小公倍数。

【解析】如果 b 不是 2^2 的倍数，因为 $[a,b]=2^2\times3\times5$，则 a 一定是 2^2 的倍数．由此可知 $[a,c]$ 一定是 2^2 的倍数，但是 $[a,c]=2^2\times3\times5$ 不是 2^2 的倍数．所以 b 是 2^2 的倍数．同理可得 c 是 3^3 的倍数，所以 $[b,c]=2^2\cdot3^3$ 整除．

因为 $[a,b]=60$，$[a,c]=270$，所以 60 是 b 的倍数，270 是 c 的倍数，所以 b，c 的最小公倍数 $[b,c]$ 是 $[60,270]$ 的约数．因为 $[60,270]=2^2\cdot3\cdot5$，所以 $[b,c]=2^2\cdot3\cdot5=540$，或 $[b,c]=2^2\cdot3=108$．

当 a＝1，b＝60，c＝270 时，$[a,c]=60$，$[a,c]=270$，$[b,c]=540$；

当 a＝5，b＝12，c＝54 时，$[a,c]=60$，$[a,c]=270$，$[b,c]=108$；