

例：3 个三位数乘积的算式

$$\overline{abc} \times \overline{bca} \times \overline{cab} = 234235286 \quad (\text{其中 } a > b > c)$$

在校对时，发现右边的积的数字顺序出现错误，但是知道最后一位 6 是正确的。

问：原式中的 \overline{abc} 是多少？

（“华罗庚金杯”少年数学邀请赛培训教程）

解：a, b, c 中不能有 0 或 5，否则乘积的末位数是 0 或 5，不是 6。

c 不能是 1，否则 $981 \times 819 \times 198 = 159080922$ ，而乘积的最高位的最小数字是 2。

若 $a < 7$ ，则

$$\overline{abc} \times \overline{bca} \times \overline{cab} \leq 654 \times 546 \times 465 = 166044060$$

不合要求

这就是说， $a \geq 7$ ，即要依次讨论： $a = 7, 8, 9$ 。

由于 234235286 被 9 除余 8，所以左边的乘积被 9 除也余 8，而 $\overline{abc}, \overline{bca}, \overline{cab}$ 除以 9 的余数都等于 $a+b+c$ 被 9 除时，余数只能是 2, 5, 8。

现在分别讨论：

① $a = 7$

这时 $a+b+c = 11$ 或 14 或 17，相应的解为

$$\left. \begin{array}{l} a=7 \\ b=4 \\ c=3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a=7 \\ b=6 \\ c=4 \end{array} \right\}$$

这里 $a = 7 > b > c \geq 2$ ，但对这两种情况 $7 \times 4 \times 3$ 与 $7 \times 6 \times 4$ 的个位数都不是 6，因此， $a = 7$ 的情况可以排除。

② $a = 8$

这时 $a+b+c = 14$ 或 17 或 20，由于 $a = 8$ ，故有三种可能： $b+c = 6, b+c = 9, b+c = 12$ ，

所有的解为

$$\left. \begin{array}{l} a=8 \\ b=4 \\ c=2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a=8 \\ b=7 \\ c=2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a=8 \\ b=6 \\ c=3 \end{array} \right\}$$

但 $8 \times 4 \times 2, 8 \times 7 \times 2, 8 \times 6 \times 3$ 的末位数都不是 6。所以， $a = 8$ 也不可能。

③ $a = 9$

同样的讨论可知，只有下列 5 种可能性

$$\left. \begin{array}{l} a=9 \\ b=3 \\ c=2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} a=9 \\ b=6 \\ c=2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} a=9 \\ b=7 \\ c=4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} a=9 \\ b=8 \\ c=6 \end{array} \right\}$$

只有其中的第 4 组： $9 \times 8 \times 3$ 的末位数为 6，其他都不是。

所以，只需计算乘积：

$$983 \times 839 \times 398 = 328245326$$