

例：观察下面得算术运算

$$1^2 = 1;$$

$$2^2 = 1 + 3;$$

$$3^2 = 1 + 3 + 5;$$

$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7;$$

$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9;$$

.....

你能从中归纳得出什么猜想？并证明你得猜想是个真命题。

（华罗庚金杯少年数学邀请赛专用培训教程小学版）

分析 所给 5 个等式左端依次是自然数 n 的平方，右端是相应的连续地从 1 开始的 n 个奇数的和。由此可以归纳出数学猜想：正整数 n 的平方等于从 1 开始的 n 个连续的和。即

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

这样，证明了我们归纳所得的猜想是个真命题。

$$\text{证明 } 2n^2 = (2n) \times n = \underbrace{2n + 2n + 2n + \cdots + 2n}_{n \text{ 个}}$$

$$= [1 + (2n - 1)] + [3 + (2n - 3)] + \cdots + [(2n - 1) + 1]$$

$$= \{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)\} + \{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)\}$$

$$= 2 \times \{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)\}$$

$$\text{所以 } n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

这样就证明了我们归纳所得的猜想是个真命题。