

例：一组互不相同的自然数，其中最小的数是 1，最大的数是 25，除 1 以外，这组数中的任一个数或者等于这组数中某一个数的 2 倍，或者等于这组数中某两个数之和。问：这组数之和最大值是多少？当这组数之和有最小值时，这组数都有哪些数？并说明和是最小值的理由。

分析与解：（1）考虑数组中各数和最大的情形

显然，最大的数组是 1 到 25 的全部都取，它的确满足要求。所以，这组数之和最大值是

$$1+2+3+\cdots+25=\frac{(1+25)\times 25}{2}=325$$

（2）考虑数组中各数和最小的情形

这数组中肯定有 1，也必有 2，不然就没有别的数了。根据“这组数中的任一个数或者等于这组数中某一个数的 2 倍，或者等于这组数中某两个数之和”，把它们按从小到大的顺序排列起来，排到第四个数，可能出现的情况只有以下 6 种：

$$1, 2 \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 4, \cdots, 25 \\ 5, \cdots, 25 \\ 6, \cdots, 25 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 5, \cdots, 25 \\ 6, \cdots, 25 \\ 8, \cdots, 25 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

最后一个数 25 是偶数，它只能是比它小的另外两个不同数之和。在这 6 种可能性中，虚线表示的没有写出来的数里面，至少要有两个数，它们的和不小于 25，不然的话，最后的 25 就表不成组中某两个数之和。为使数组中各数之和尽量小，应当在“…”填尽量少的数，并使填入的数之和尽量小。

在 1, 2, 3, 4, …, 25 中，“…”处可以只填 10, 15 两个数，就使两个数之和 25，并且满足对数组的各项要求。因为，在以后的其他情形里，即便能够只填入两个数，它的各数之和也都变大了；而填入三个数的话，后两个数之和为 25，整个和就更大了。所以，数组 1, 2, 3, 5, 10, 15,

25 的和是最小的，这个最小的和等于

$$1+2+3+5+10+15+25=61$$

答：这样一组数的和的最大值是 325；最小值存在，是 61。