

### 试题精选三十三——有理数问题

例：设  $N = 10 \times \frac{2000^{2001} + 2001^{2002}}{2000^{2000} + 2001^{2001}}$ ，求  $N$  的整数部分。

$$\text{解：} \frac{N}{10} = \frac{2000 \left( 2000^{2000} + \frac{2001}{2000} \times 2001^{2001} \right)}{2000^{2000} + 2001^{2001}} > 2000$$

$$\begin{aligned} \frac{N}{10} - 2000 &= \frac{2000^{2001} + 2001^{2002}}{2000^{2000} + 2001^{2001}} - 2000 \\ &= \frac{2000^{2001} + 2001^{2002} - 2000^{2001} - 2000 \times 2001^{2001}}{2000^{2000} + 2001^{2001}} \\ &= \frac{2001^{2001}}{2000^{2000} + 2001^{2001}} \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} 1 &> \frac{2001^{2001}}{2000^{2000} + 2001^{2001}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2001} \times \left( \frac{2000}{2001} \right)^{2000}} > \frac{1}{1 + \frac{1}{2001}} > 0.9 \end{aligned}$$

所以  $2001 > \frac{N}{10} > 2000.9$

$N$  的整数部分是 20009。